

Marcos Pedrero S.

Ingeniero Civil

Cálculo de arcos

INTRODUCCION

El único método racional para el cálculo de arcos de que dispone el ingeniero es el que se apoya en las leyes de la deformación de los cuerpos sólidos establecidas por la Teoría de la Elasticidad y que han sido confirmadas por la experiencia.

En este trabajo damos una variante del método de J. Resal cuya obra intitulada "Stabilité des Constructions" es muy conocida de los ingenieros. Para mayor claridad hemos dado con más detalles los cálculos y demostrado muchas fórmulas que Resal sólo indica en su obra. Para ser comprendido este método sólo exige nociones elementales de estática gráfica y de cálculo infinitesimal.

Existe otro método geométrico de cálculo de arcos que se apoya en nociones de peso elástico y de elipse de elasticidad indicadas en la obra de W. Ritter (Anwendungen der graphisches tatic). Aplicaciones de este método podrá consultarlas el lector en Genie Civil (Diciembre de 1925), y en la obra L'arc continu, de H. Lossier.

Un tercer método de cálculo de arcos ha sido propuesto por Bertrand de Fontviolant profesor de la Escuela Central de París y autor de la interesante obra Los nuevos métodos de la Resistencia de Materiales. En el 3.er volumen de Mecánica General de la Escuela Politécnica de París por Lecornu viene una exposición de dicho método.

En las aplicaciones estudiaremos en este trabajo los dos casos más corrientes.

1.º Arcos con dos empotramientos de nivel; es el caso de los arcos de albañilería y concreto armado; y

2.º Arcos con dos articulaciones de nivel; es el tipo de arco utilizado en las construcciones metálicas.

La verificación de un arco de dimensiones, dadas con dos empotramientos de nivel se reduce en el caso general a resolver tres ecuaciones cuyas incógnitas son la reacción vertical Y , el empuje Q y el momento μ

$$\begin{aligned} Y_a - W + \mu b - Qc &= 0 \\ Y_a' - W' + \mu b' - Qc' &= 0 \\ Y_a'' - W'' + \mu b'' - Qc'' &= 0 \end{aligned}$$

En estas ecuaciones $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$ sólo dependen de las dimensiones del arco pero W, W' y W'' son función no solamente de las dimensiones, sino también de las fuerzas que solicitan el arco. Para determinar W, W' y W'' es necesario trazar únicamente tres funiculares que servirán para resolver todo problema relativo al arco dado cualesquiera que sean las fuerzas y su distribución. El trazado de estos tres funiculares depende únicamente de las dimensiones del arco y no de las fuerzas que lo solicitan. Si el arco es simétricamente cargado respecto a la vertical que pasa por la mitad de la luz, bastarán solamente dos ecuaciones.

Algunos ingenieros para facilitar el cálculo desprecian en una de las ecuaciones el término $Q \int \frac{ds}{E\Omega}$ pero esta manera de proceder puede comprometer la estabilidad de las obras pues los resultados así obtenidos pueden alejarse mucho de los dados por el cálculo exacto, como lo hacemos notar por un ejemplo tomado de la obra de Aragón intitulada *Ponts et ouvrages en maçonnerie* (B. C. T. P.). En el ejemplo dado por este autor y los cálculos aproximados del mismo indican que el centro de presión coincidiría con la fibra media en los empotramientos; nosotros por el cálculo exacto hemos comprobado que el centro de presión sale fuera del tercio central y que el error de Aragón consiste en haber despreciado el término $Q \int \frac{ds}{E\Omega}$.

DESFORMACION DEL ARCO ELASTICO

Bajo la acción de las cargas el arco se deforma y un punto M de la fibra media AMB de coordenadas x_1, y_1 experimenta los desplazamientos $\delta x_1, \delta y_1$; al mismo tiempo la tangente en el punto M a la fibra media experimenta una variación angular $\delta \theta_1$. Conforme a la teoría estas deformaciones en un punto cualquiera M son dadas por las tres ecuaciones muy conocidas.

$$\begin{aligned} 1) \quad \delta \ell_1 &= \delta \ell_0 + \int_0^{s_1} \frac{X ds}{EI} \\ 2) \quad \delta x_1 &= \delta x_0 - \delta \theta_0 (y_1 - y_0) - \int_0^{s_1} \frac{X (y_1 - y)}{EI} ds - Q \int_0^{s_1} \frac{ds}{E\Omega} \\ 3) \quad \delta y_1 &= \delta y_0 + \delta \theta_0 (x_1 - x_0) + \int_0^{s_1} \frac{X (x_1 - x)}{EI} ds - Q \int_0^{s_1} \frac{\text{tg } \theta ds}{E\Omega} \end{aligned}$$

Las integrales tienen por límite M y A (Fig. 1), siendo s_1 la longitud de la fibra media entre estos dos puntos. En estas fórmulas X es el momento de flexión, I y Ω el momento de inercia y la sección transversal normal a la fibra media, E el coeficiente de elasticidad.

Tracemos la vertical en el punto A (Fig. 2), y sea C un punto de la curva de presiones real del arco correspondiente a una cierta distribución de cargas. En dicho punto C tendremos un empuje horizontal Q y una reacción vertical Y. El momento de las fuerzas Y, Q con respecto al punto A es entonces

$$\mu = QZ$$

Si el centro de presión C se encuentra bajo el punto A como en Fig. 2, Z es negativo y por consiguiente μ y positivo si C se encuentra arriba de A.

En el estudio a continuación voy a elegir como incógnitas las cantidades Y, Q, μ cuya determinación nos permitirá deducir el centro de presión por la relación

$$Z = \frac{\mu}{Q}$$

y por consiguiente trazar la línea de los centros de presión real del arco. El momento de flexión en un punto cualquiera M del arco se obtendrá tomando los momentos respecto de este punto de las fuerzas Y, Q y las fuerzas exteriores P comprendidas entre A y M (Fig. 2). Designando por x_0 , y_0 las coordenadas de A se tiene

$$X = Y(x - x_0) - \sum P(x - x_0 - u) + Qz - Q(y - y_0)$$

o sea

$$4) \quad X = Y(x - x_0) - \sum P(x - x_0 - u) + \mu - Q(y - y_0)$$

UNA PROPIEDAD DE LOS POLIGONOS FUNICULARES

Consideremos un sistema de fuerzas verticales y tracemos un funicular con una distancia polar d. Se sabe, que para determinar el momento de las fuerzas de la izquierda con respecto a un punto M cualquiera debemos prolongar el primer lado del funicular AB y trazar la paralela a las fuerzas por M. La longitud ϵ comprendida entre la prolongación del primer lado y el funicular multiplicada por la distancia polar d nos dará el momento de las fuerzas de la izquierda respecto del punto M, si medimos ϵ a la escala de las fuerzas, y d a la escala de las longitudes. Luego tenemos

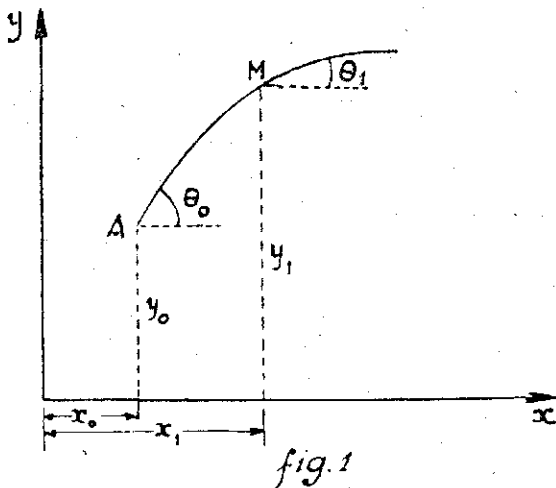
$$\sum P(x - x_0 - u) = \epsilon d$$

y la ecuación (4) queda entonces en la forma

$$5) \quad X = Y(x - x_0) - \epsilon d + \mu - Q(y - y_0)$$

ARCO EMPOTRADO CON APOYOS DE NIVEL

Elegiremos como origen de coordenadas el apoyo A de la izquierda. Aplicaremos las ecuaciones (1), (2), (3), (5) entre los dos apoyos A y B (Fig. 1). Considerando que en el primer apoyo los desplazamientos



horizontal y vertical son nulos como igualmente la variación angular de la fibra media, tenemos:

$$\delta x_0 = \delta y_0 = \delta \theta_0 = 0$$

Igualmente para el apoyo de la derecha se tiene

$$\delta l = \delta h = \delta \theta_1 = 0$$

Además deberemos hacer

$$y_1 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = l$$

puesto que A y B están al mismo nivel y hemos elegido el punto A como origen de coordenadas.

Así obtenemos entonces las tres ecuaciones

$$6) \int_0^s \frac{X ds}{EI} = 0$$

$$7) \int_0^s \frac{Xy ds}{EI} - Q \int_0^s \frac{ds}{E\Omega} = 0$$

$$8) \int_0^s \frac{X(1-x) ds}{EI} - Q \int_{\theta}^s \frac{d\theta \operatorname{tg} \theta}{EI} = 0$$

La ecuación (5) queda en la forma:

$$9) \quad X = Yx - \epsilon d + \mu - Qy$$

El último término del 1.er miembro de (8) en un arco simétrico respecto a la vertical que pasa a la distancia $x = \frac{1}{2}$ es nulo y no lo tomaremos en cuenta a continuación.

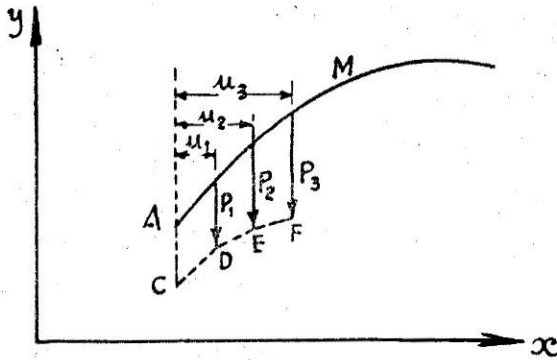


fig. 2

Reemplazando la expresión (9) del momento de flexión X en las tres primeras ecuaciones, obtenemos:

$$10) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y \int_0^s \frac{x ds}{EI} - d \int_0^s \frac{\epsilon ds}{EI} + \mu \int_0^s \frac{ds}{EI} - Q \int_0^s \frac{y ds}{EI} = 0 \\ Y \int_0^s \frac{xy ds}{EI} - d \int_0^s \frac{\epsilon y ds}{EI} + \mu \int_0^s \frac{y ds}{EI} - Q \int_0^s \frac{y^2 ds}{EI} - Q \int_0^s \frac{ds}{E\Omega} = 0 \\ Y \int_0^s \frac{x(l-x)}{EI} ds - d \int_0^s \frac{\epsilon(l-x)}{EI} ds + \mu \int_0^s \frac{(l-x) ds}{EI} - Q \int_0^s \frac{y(l-x)}{EI} ds = 0 \end{array} \right.$$

En un arco dado las integrales en que no interviene ϵ quedan constantes, pues ellas dependen únicamente de las dimensiones del arco y no de las cargas y se pueden calcular fácilmente por métodos gráficos y en ciertos casos por métodos analíticos; por consiguiente escribiremos las ecuaciones anteriores en la forma:

$$11) \left\{ \begin{array}{l} Y_a - d \int_0^s \frac{\epsilon ds}{EI} + \mu b - Qc = 0 \\ Y_a' - d \int_0^s \epsilon y ds + \mu b' - Qc' = 0 \\ Y_a'' - d \int_0^s \frac{\epsilon(1-x)}{EI} ds + \mu b'' - Qc'' = 0 \end{array} \right.$$

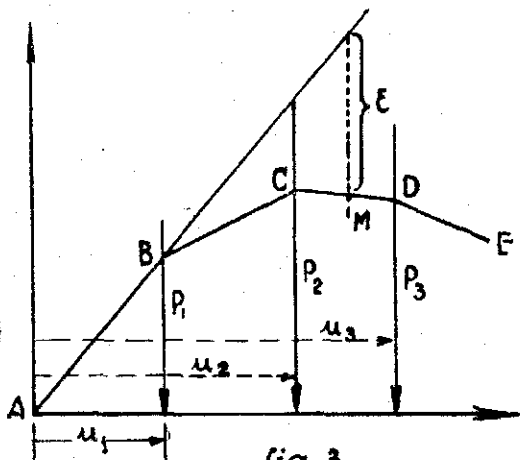


fig. 3

El problema más importante que se presenta en los arcos es la determinación de las integrales de la carga que son aquellas en que interviene ϵ . Voy a indicar un método que permite determinarlas rápidamente para una distribución cualquiera de cargas.

Consideremos en fig. 4 una sola carga P a la distancia u del apoyo A

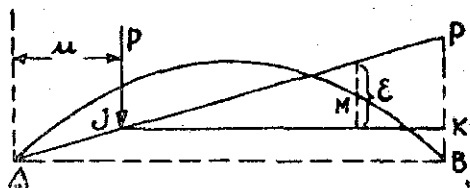


fig. 4

del arco. Tracemos un funicular AJK de P con la distancia polar arbitraria d . Según lo dicho respecto a la propiedad de los funiculares, el momento de la fuerza P respecto a un punto M del arco está dado por el producto ϵd . Este producto es nulo entre los abscisas u y cero, luego tenemos:

$$12) \left\{ \begin{aligned} d \int_0^s \frac{\epsilon ds}{EI} &= d \int_{s_u}^s \frac{\epsilon ds}{EI} \\ d \int_0^s \frac{\epsilon y ds}{EI} &= d \int_{s_u}^s \frac{\epsilon y ds}{EI} \\ d \int_0^s \frac{\epsilon (l-x)}{EI} ds &= d \int_{s_u}^s \frac{\epsilon (l-x)}{EI} ds \end{aligned} \right.$$

Pero el momento de P respecto a M es

$$\epsilon d = P (x-u)$$

Reemplazando en las integrales obtenemos:

$$13) \left\{ \begin{aligned} d \int_0^s \frac{\epsilon ds}{EI} &= P \int_{s_u}^s \frac{(x-u)}{EI} ds \\ d \int_0^s \frac{\epsilon y ds}{EI} &= P \int_{s_u}^s \frac{(x-u)}{EI} y ds \\ d \int_0^s \frac{\epsilon (l-x)}{EI} ds &= P \int_{s_u}^s \frac{(x-u) (l-x)}{EI} ds \end{aligned} \right.$$

Consideremos en los diversos puntos del arco tres sistemas de fuerzas verticales $\frac{ds}{EI}$, $\frac{y ds}{EI}$, $\frac{(l-x) ds}{EI}$ y con distancias polares arbitrarias d_1 , d_2 , d_3 construyamos tres funiculares, uno para cada sistema de fuerzas (fig. 5). Prolonguemos en cada funicular su último lado.

Para un punto de abscisa u la suma de los momentos de estas fuerzas ficticias comprendidas entre l y u tiene por valor $\lambda_1 d_1$, $\lambda_2 d_2$, $\lambda_3 d_3$, según lo indicado anteriormente respecto a una propiedad de los polígonos funiculares. Para las tres fuerzas elementales ficticias

$$\frac{ds}{EI}, \quad \frac{y ds}{EI}, \quad \frac{(l-x) ds}{EI}$$

colocadas a la distancia x de A sus momentos son respectivamente

$$\frac{(x-u) ds}{EI}, \quad \frac{(x-u) y ds}{EI}, \quad \frac{(x-u) (l-x) ds}{EI}$$

fuego los momentos de todas estas fuerzas elementales ficticias comprendidas entre 1 y u serán:

$$\Sigma \frac{(x-u) ds}{EI}, \quad \Sigma \frac{(x-u) y ds}{EI}, \quad \Sigma \frac{(x-u) (l-x) ds}{EI}$$

o sea:

$$d_1 \lambda_1 = \int_{s_u}^s \frac{(x-u) ds}{EI}$$

$$d_2 \lambda_2 = \int_{s_u}^s \frac{(x-u) y ds}{EI}$$

$$d_3 \lambda_3 = \int_{s_u}^s \frac{(x-u) (l-x) ds}{EI}$$

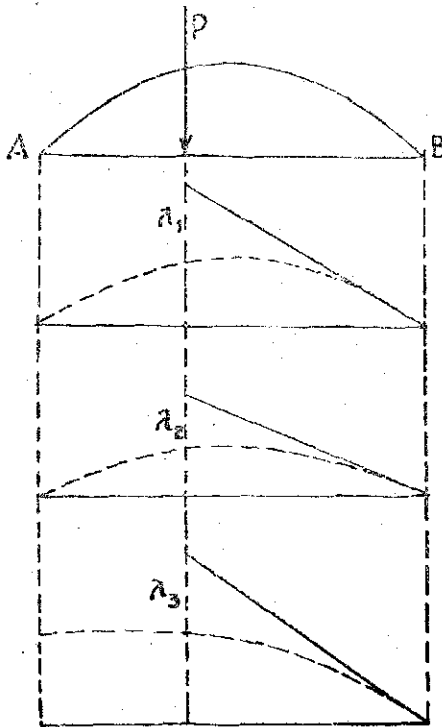


fig.5

Por consiguiente para un sistema de fuerzas cualesquiera que obren sobre el arco tendremos, considerando las ecuaciones (11) y (13):

$$Ya - d_1 \Sigma P \lambda_1 + \mu b - Qc = 0$$

$$Ya' - d_2 \Sigma P \lambda_2 + \mu b' - Qc' = 0$$

$$Ya'' - d_3 \Sigma P \lambda_3 + \mu b'' - Qc'' = 0$$

que nos permiten determinar las tres incógnitas Q , Y , μ . Para una carga P móvil a la distancia u de A se puede construir un gráfico de los valores Q , Y , μ en función de u .

Si consideramos una carga p infinitamente pequeña a la distancia u de A los valores de las integrales de carga (13) serán

$$pd_1 \lambda' du, pd_2 \lambda'' du, pd_3 \lambda''' du$$

luego para una carga uniformemente repartida parcial que obra entre u_1 y u_2 tendremos (fig. 6)

$$pd_1 \int_{u_1}^{u_2} \lambda' du = pd_1 \omega$$

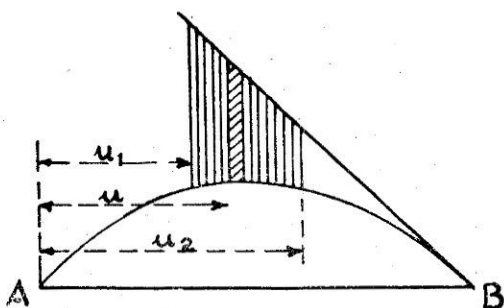


fig. 6

siendo ω el área interceptada por las verticales trazadas a distancias u_2 y u_1 y comprendida entre el primer funicular y el último lado de este funicular; ω es pues la superficie hachurada en la figura. Esta misma interpretación corresponde a las otras dos integrales de carga.

Si las cargas que obran en el arco están distribuidas simétricamente (fig. 7) respecto a la vertical que pasa por la llave se tiene entonces para la reacción vertical

$$Y = \frac{\Sigma P}{2}$$

luego entonces debemos en este caso emplear para determinar Q y μ las dos primeras ecuaciones 10.

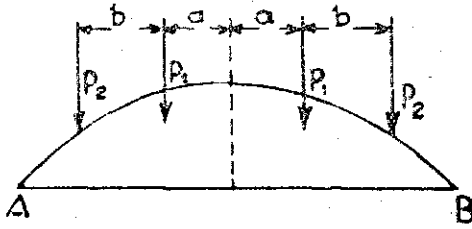


fig. 7

Deducción de algunas fórmulas del arco parabólico con apoyos empotrados y de nivel para el caso de sección constante.

Consideremos un arco parabólico, cuya fibra media tenga por ecuación

$$14) \quad y = \frac{4 H x (1-x)}{l^2}$$

Supondremos además que el arco es muy rebajado para que podamos reemplazar sin error apreciable ds por dx . Deduciremos entonces analíticamente los valores de las incógnitas Q , Y , μ para una carga concentrada que obra a la distancia u del primer apoyo del arco. Como suponemos un arco de sección constante el producto EI será constante. Multiplicando la primera y última de las ecuaciones (10) por EI , esta cantidad no intervendrá en dichas ecuaciones. Haciendo lo mismo con la 2.a de las ecuaciones (10) se deduce que todos los términos con excepción del último no contendrá I ; este último término es

$$Q \cdot \frac{I}{\Omega} \int_0^s ds = Qr^2 \int_0^s ds$$

siendo r el radio de giro.

Reemplacemos ahora ds por dx , y el valor de la ordenada y de la fibra media por su expresión (14) en las ecuaciones (10) y calculemos separadamente las diversas integrales analíticamente. Así obtenemos

$$\int_0^s xy ds = \frac{1}{3} bl^2$$

Designemos por b la flecha del arco y tenemos:

$$\int_0^s y ds = \frac{2}{3} bl$$

$$\int_0^s y^2 ds = \frac{8 b^2 l}{15}$$

$$\int_0^s x (1-x) ds = \frac{l^3}{6}$$

$$\int_0^s (1-x) ds = \frac{l^2}{2}$$

$$\int_0^s y (1-x) ds = \frac{bl^2}{3}$$

$$\int_0^s x ds = \frac{l^2}{2}$$

$$\int_0^s ds = l$$

Determinemos ahora el valor de las integrales en que interviene ϵ es decir las integrales de la carga (13):

Obtenemos

$$d \int \epsilon ds = P \int_{s_u}^s (x-u) ds = P \int_u^l (x-u) dx = P \left(\frac{l^2}{2} + \frac{u^2}{2} - ul \right)$$

$$d \int \epsilon y ds = P \int_{s_u}^s (x-u) y ds = \frac{Pb}{3} \left(l^2 - \frac{u^4}{l^2} - 2ul + \frac{2u^3}{l} \right)$$

$$d \int \epsilon (1-x) ds = P \int_{s_u}^s (x-u) (1-x) ds = \frac{P}{6} (l^3 - u^3 - 3ul^2 + 3u^2 l)$$

Llevando estos valores en ecuaciones (10) obtenemos

$$15) \left\{ \begin{array}{l} Q = \frac{15 u^2 (u-1)^2}{4 b l^3 \left(1 + \frac{45 r^2}{4 b^2} \right)} \\ \mu = \frac{2}{3} Q b - \frac{P u (l-u)^2}{l^2} \\ Y = \frac{P (l-u)}{l^3} (l+2u) \end{array} \right.$$

fórmulas en las cuales b es la flecha, r el radio de giro. En un arco de albañilería de sección y espesor constantes se tiene

$$r^2 = \frac{e^2}{12}$$

Las relaciones (15) y (16) son indicadas en la obra de Resal *Stabilité des Constructions*.

Si se elimina Q entre las dos primeras ecuaciones (15) se obtendrá el valor de μ en función de P y u . La razón $\frac{\mu}{Q}$ nos da en seguida la posición de la línea de presiones reales del arco, es decir el valor de Z (fig. 2); si este valor es negativo el punto C quedaría debajo de A , si es positivo se medirá hacia arriba de A .

Si se quiere determinar ahora los valores de μ , Q , Y , que corresponderían a una sobrecarga uniforme parcial comprendida entre u_1 y u_2 siendo

$$u_1 < u_2$$

bastará entonces reemplazar P por pdu en las fórmulas (15) y efectuar la integración entre los límites u_2 y u_1 . Así obtenemos para la sobrecarga móvil completa del arco:

$$16) \left\{ \begin{array}{l} Q = \frac{p l^2}{8 b \left(1 + \frac{45 r^2}{4 b^2} \right)} \\ \mu = \frac{2}{3} b Q - \frac{p l^2}{12} \\ Y = \frac{p l}{2} \end{array} \right.$$

De las dos primeras ecuaciones se deduce por eliminación de Q

$$\mu = \frac{45 p l^2 r^2}{48 b^2 \left(1 + \frac{45 r^2}{4 b^2} \right)}$$

luego la línea de presión real del arco queda determinada por la relación

$$Z = \frac{\mu}{Q} = \frac{45 \times 8r^2}{48b} = \frac{45r^2}{6b}$$

En arcos de albañilería se tiene

$$r^2 = \frac{e^2}{12}$$

siendo e el espesor constante del arco

$$Z = \frac{45 e^2}{72 b}$$

Hemos designado por b la flecha del arco

Arcos con dos articulaciones de nivel

Apliquemos las ecuaciones (2) y (5) entre las dos articulaciones. Obtenemos:

$$\delta x_1 = \delta x_0 - \delta \theta_0 (y_1 - y_0) - \int_0^s \frac{X (y_1 - y)}{EI} ds - Q \int_0^s \frac{ds}{E\Omega}$$

$$X = Y (x - x_0) - \epsilon d - Q (y - y_0)$$

El momento μ es nulo.

Tomaremos los ejes de coordenadas en el punto A, luego la ordenada y_1 representa la ordenada de B que es nula; la abcisa de esta articulación es

$$x_1 = l$$

siendo l la luz del arco.

Los desplazamientos horizontales de A y B son nulos luego

$$\delta x_1 = \delta x_0 = 0$$

y las dos ecuaciones anteriores se reducen a las siguientes:

$$\int_0^s \frac{X y ds}{EI} - Q \int_0^s \frac{ds}{E\Omega} = 0$$

$$X = Y x - \epsilon d - Q y$$

Reemplazando el valor de X obtenemos:

$$Y \int_0^s \frac{xyds}{EI} - d \int_0^s \frac{\epsilon ds}{EI} - Q \int_0^s \frac{y^2 ds}{EI} - Q \int_0^s \frac{ds}{E\Omega} = 0$$

de donde:

$$17) \quad Q = \frac{Y \int_0^s \frac{xyds}{EI} - d \int_0^s \frac{\epsilon yds}{EI}}{\int_0^s \frac{y^2 ds}{EI} + \int_0^s \frac{ds}{E\Omega}}$$

La componente vertical Y de la reacción en la articulación A tiene por expresión

$$Y = \Sigma \frac{P(1-u)}{l}$$

siendo u la distancia de la fuerza P al punto A.

Consideremos ahora que obre sólo una fuerza P a la distancia u. Tenemos entonces.

$$Y = \frac{P(1-u)}{l}$$

y según lo indicado con motivo de la ecuación (13):

$$d \int_0^s \frac{\epsilon ds}{EI} = P \int_{s_u}^s \frac{(x-u) ds}{EI}$$

luego tenemos:

$$18) \quad Y \int_0^s \frac{xyds}{EI} - d \int_0^s \frac{\epsilon ds}{EI} = \frac{P(1-u)}{l} \int_0^s \frac{xyds}{EI} - P \int_0^s \frac{(x-u) yds}{EI}$$

Para dar una interpretación gráfica de la ecuación anterior consideremos ahora una viga recta libremente apoyada en A y B y hagamos obrar

sobre la viga fuerzas $\frac{yds}{EI}$ La reacción en B es $\frac{1}{l} \int \frac{xyds}{EI}$ y el momento de esta reacción respecto al punto M es

$$(1-u) \int_0^s \frac{xyds}{EI}$$

El momento de las fuerzas $\frac{yds}{EI}$ comprendidas entre l y u respecto a M es

$$- \int_0^s \frac{y(x-u) ds}{EI}$$

luego el momento en M de las fuerzas ficticias producidas en la viga recta es:

$$\frac{1-u}{l} \int_0^s \frac{xyds}{EI} - \int_{s_u}^s \frac{y(x-u) ds}{EI}$$

luego si trazamos un funicular con distancia polar a de estas fuerzas $\frac{yds}{EI}$ tendremos

$$\eta_a = \frac{1-u}{l} \int_0^s \frac{xyds}{EI} - \int_{s_u}^s \frac{y(x-u) ds}{EI}$$

Reemplazando en (18) obtenemos:

$$Y \int_0^s \frac{xyds}{EI} - d \int_0^s \frac{eds}{EI} = P \eta_a$$

Se ve entonces la facilidad con que se determina el numerador de fórmula (17) que da el empuje en un arco con dos articulaciones de nivel.

Arco de sección constante con dos articulaciones de nivel. Efecto de una carga concentrada única.

De ecuaciones (17) y (18) se deduce para una carga P a la distancia u

$$Q = \frac{P \left(\frac{1-u}{l} \int_0^s \frac{xy ds}{EI} - \int_{s_n}^s \frac{(x-u) y ds}{EI} \right)}{\int_0^s \frac{y^2 ds}{EI} + \int_0^s \frac{ds}{E\Omega}}$$

Y para el arco de sección constante se deduce fácilmente de la ecuación anterior

$$19) \quad Q = \frac{P \left[\frac{1-u}{l} \int_0^s xy ds - \int_0^s (x-u) y ds \right]}{\int_0^s y^2 ds + r^2 S}$$

Si el arco describe la curva parabólica

$$y = \frac{4H}{l^2} x (l-x)$$

y si admitimos además que el arco es bastante rebajado para que se pueda reemplazar ds por dx los cálculos analíticos se hacen sin dificultad. Los valores de las integrales se hacen fácilmente:

$$\int_0^s xy ds = \frac{bl^2}{3}$$

$$\int_0^s (x-u) y ds = \frac{b}{3} \left(l^2 - \frac{u^2}{l^2} - 2ul + \frac{2u^3}{l} \right)$$

$$\int_0^s y^2 ds = \frac{8}{15} b^2 l$$

Reemplazando en (19) y haciendo al mismo tiempo $s=l$ obtenemos:

$$20) \quad Q = \frac{5Pu \left(1 + \frac{u^3}{l^3} - \frac{2u^2}{l^2} \right)}{8b \left(1 + \frac{15r^2}{8b^2} \right)}$$

Se obtiene el empuje del arco para una carga uniforme parcial comprendida entre las abscisas u_1 y u_2 , siendo $u_2 > u_1$ reemplazando en la expresión anterior P por pdu y efectuando la integración entre los límites u_2 y u_1 . Así obtenemos para el arco con carga uniforme repartida total

$$21) \quad Q = \frac{pl^2}{8b \left[1 + \frac{15r^2}{8b^2} \right]}$$

Las dos últimas relaciones son dadas por Resal en su obra *Stabilité des Constructions*.

Aplicación práctica

Consideremos un arco de albañilería de 11,10 metros calculado en la obra *Ponts et cuvrages en maçonnerie* por E. Aragón (B. C. T. P.). Sean y, x la ordenada y la abscisa de la fibra media, e_x el espesor variable del

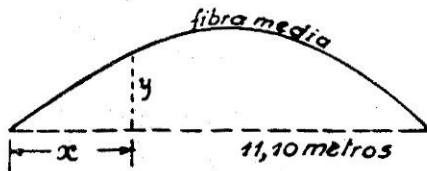


fig. 8

arco. Dividiendo la fibra media en partes iguales considerando que el momento de inercia se calcula por la fórmula general conocida:

$$I = \frac{be_x^3}{12}$$

y que la sección es

$$\Omega = be_x$$

y haciendo $b=1$ las ecuaciones (10) nos dan si suprimimos el factor común ds

$$22) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y \sum \frac{x}{e^3} - d \sum \frac{\epsilon}{e^3} + \mu \sum \frac{1}{e^3} - Q \sum \frac{y}{e^3} = 0 \\ Y \sum \frac{xy}{e^3} - d \sum \frac{\epsilon y}{e^3} + \mu \sum \frac{y}{e^3} - Q \sum \frac{y^2}{e^3} - Q \sum \frac{1}{12e} = 0 \\ Y \sum \frac{x(1-x)}{e^3} - d \sum \frac{\epsilon(1-x)}{e^3} + \mu \sum \frac{1-x}{e^3} - Q \sum \frac{y(1-x)}{e^3} = 0 \end{array} \right.$$

El cuadro siguiente nos permite determinar las sumas que figuran en las ecuaciones anteriores.

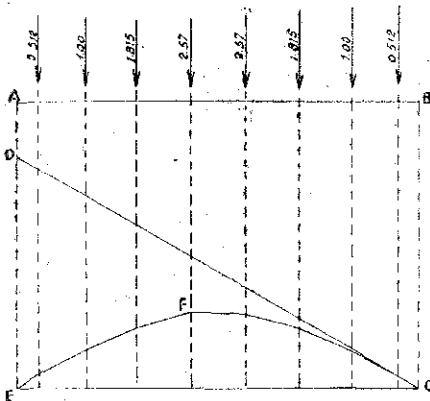
y	x	l-x	Espesor c _x	l	l	x	l-x	y	y ²	xy	x(l-x)	y(l-x)
				$\frac{l}{e^3 x}$	$\frac{l}{12 e}$	$\frac{x}{e^3}$	$\frac{l-x}{e^3}$	$\frac{y}{e^3}$	$\frac{y^2}{e^3}$	$\frac{xy}{e^3}$	$\frac{x(l-x)}{e^3}$	$\frac{y(l-x)}{e^3}$
0,55	0,60	10,5	1,25	0,512	0,0866	0,3072	5,376	0,281	0,1549	0,1686	3,2256	2,9505
1,45	1,90	9,2	1,00	1,000	0,0833	1,9000	9,2000	1,450	2,1025	2,755	17,480	13,34
2,05	3,30	7,8	0,82	1,8148	0,1016	5,9888	14,1554	3,720	7,6270	12,276	46,7126	29,016
2,38	4,80	6,3	0,73	2,5708	0,1142	12,3398	16,196	6,118	14,5618	29,3664	77,740	38,5434
2,38	6,30	4,8	0,73	2,5708	0,1142	16,1960	12,3398	6,118	14,5613	38,5434	77,7407	29,3664
2,05	7,80	3,3	0,82	1,8148	0,1016	14,1554	5,9888	3,720	7,627	29,016	46,7128	12,276
1,45	9,2	1,9	1,00	1,000	0,0833	9,2000	1,9000	1,450	2,1025	13,34	17,480	2,755
0,55	10,50	0,6	1,25	0,512	0,0666	5,376	3,8072	0,281	0,1549	2,9505	3,2256	0,1686
				11,7952	0,7314	65,4632	65,4632	23,138	48,8914	128,416	290,318	128,416

Tracemos ahora los tres polígonos funiculares con fuerzas ficticias

$\frac{l}{e^3 x}$, $\frac{y}{e^3}$, $\frac{l-x}{e^3}$ respectivamente, de figuras (9), (10), (11).

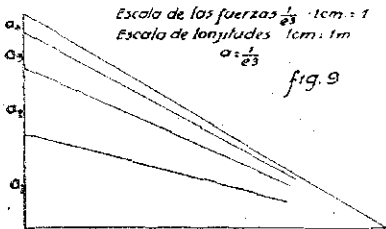
Para el primer polígono se ha elegido como escala de fuerzas 1 cm = 1 para los otros dos 1 cm = 2 y 1 cm = 10 respectivamente. Para los tres funiculares se ha elegido la misma distancia polar, 10 centímetros. Los dos primeros polígonos son simétricos respecto a la vertical que pasa por la mitad de la luz del arco. Estos tres funiculares permiten resolver todo problema cualquiera que sean las fuerzas y su distribución en el arco.

TRAZADO DEL FUNICULAR DE LAS FUERZAS $\frac{l}{e^3}$

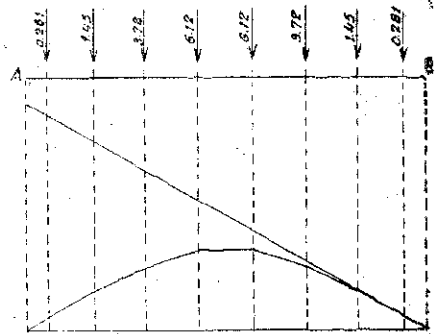


Escala de las fuerzas $\frac{l}{e^3}$ 1cm = 1
Escala de longitudes 1cm = 1m
 $\alpha = \frac{1}{e^3}$

fig. 9

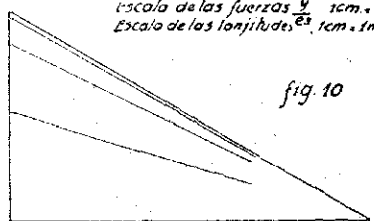


TRAZADO DEL FUNICULAR DE LAS FUERZAS $\frac{y}{e^3}$



Escala de las fuerzas $\frac{y}{e^3}$ 1cm = 2
Escala de las longitudes $\frac{1}{e^3}$ 1cm = 1m.

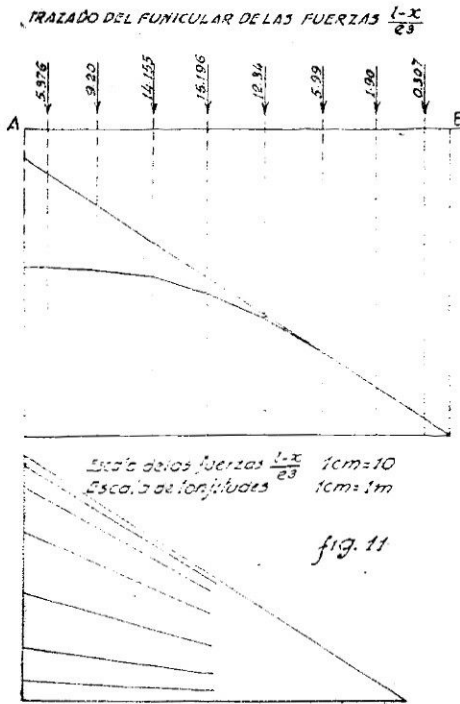
fig. 10



Como aplicación supongamos que el arco esté solicitado por las fuerzas en la forma indicada en fig. 12. Es una sollicitación en que las fuerzas están distribuidas simétricamente respecto a la vertical que pasa por la mitad del arco luego tendremos para la reacción vertical

$$Y = \frac{\Sigma P}{2} = 32,92 \text{ toneladas}$$

y para determinar Q y μ nos bastarán las dos primeras ecuaciones (22).



Llevemos las fuerzas sobre el primer funicular (fig. 9) y tracemos las verticales a plomo de las fuerzas reales. Estas verticales interceptan entre dicho funicular y su último lado las longitudes siguientes:

Fuerzas toneladas P	Longitud interceptada cms λ'	P λ'
10,73	6	64,38
9,19	4,6	42,274
7,05	3	21,15
5,95	1,65	9,817
5,95	0,70	4,1655
7,05	0,20	1,41
9,19	0,03	0,27
10,73	0	0
		$\Sigma = 143,466$

$$d \Sigma \frac{\epsilon}{e^3} = d \Sigma P \lambda = 1434,66$$

puesto que la escala de fuerzas del funicular es 1 cm = 1, la de longitudes de 1 cm. por metro y la distancia polar elegida es 10 cms.

Coloquemos las fuerzas reales de figura 12 en el segundo funi-

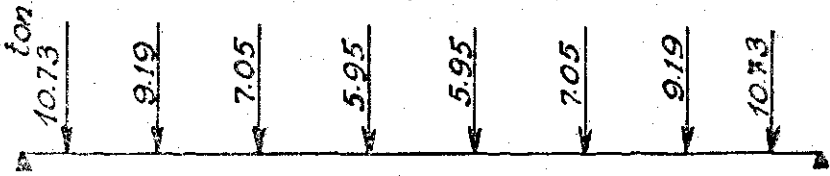


fig. 12

cular de fig. 10 y tracemos las verticales a plomo de las fuerzas. Estas verticales interceptan entre el polígono funicular y su último lado las longitudes λ'_1 y se tiene:

	Fuerzas P	Longitud interceptada λ'_1 cms.	$P \lambda'_1$
	10,73	5,85	62,7705
	9,19	4,40	40,4360
	7,05	2,80	19,740
	5,95	1,45	8,6275
	5,95	0,50	2,975
	7,05	0,15	1,0575

de donde

$$\Sigma P \lambda'_1 = 135,60$$

Como la escala de longitudes es 1 cm = 1 metro, la de fuerzas ficticias 1 cm = 2 y la distancia polar elegida de 10 cms., obtenemos

$$d \Sigma \frac{\epsilon y}{e^3} = d \Sigma P \lambda_1 = 2 \times 10 \Sigma P \lambda'_1 = 2712,12$$

Reemplazando ahora los valores en las dos primeras ecuaciones (22), obtenemos:

$$32,92 \cdot 65,46 - 1434,66 + 11,795 \mu - 23,138 Q = 0$$

23)

$$32,92 \cdot 128,41 - 2712,12 + 23,138 \mu - 0,7314 Q - 48,8914 Q = 0$$

de donde se deduce:

$$11,795 \mu - 23,138 Q = - 720,28$$

$$23,14 \mu - 49,625 Q = - 1515,466$$

y por consiguiente:

$$Q = \frac{1209,2}{49,625 \cdot 11,795 - 535,367} = 24,08$$

$$\mu = \frac{- 720,28 + 557,21}{11,795} = - \frac{163,07}{11,795} = - 13,81$$

Reemplazando ahora estos valores de Q y μ en la 3.a ecuación (22) y obtenemos:

$$d \sum \frac{\epsilon (1-x)}{e^3} = 32,92 \cdot 290,318 - 13,81 \cdot 65,46 - 24,08 \cdot 128,416 = 5561,07$$

El valor de Z se obtiene:

$$Z = \frac{\mu}{Q} = - \frac{13,81}{24,08} = - 0,57$$

Coloquemos ahora las fuerzas en el 3.er funicular y obtenemos:

	P ton.	λ_3 mms.	$P \lambda_3$
	10,73	25,5	273,51
	9,19	18,5	170,015
	7,05	10,5	74,025
	5,95	4,5	26,77
	5,95	1,0	5,95
			550,27

Y por consiguiente:

$$d \sum P \lambda_3 = 5502,7$$

que difiere muy poco del valor

$$5561,07$$